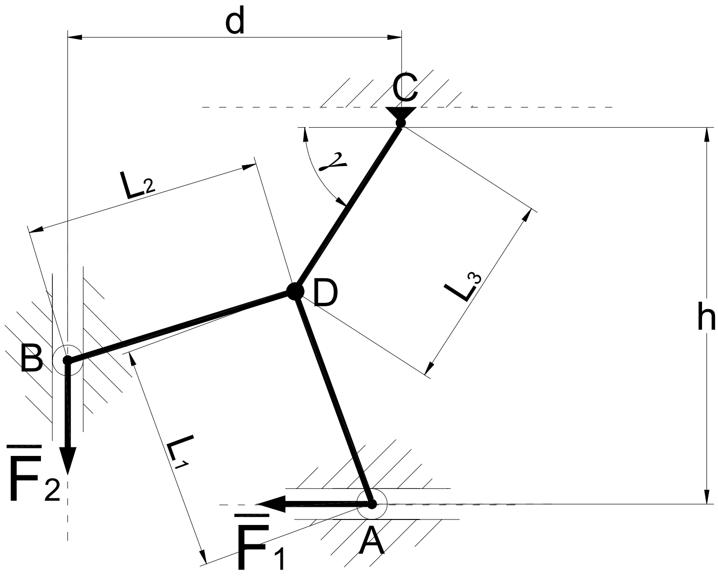
VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL
FACULTEIT TOEGEPASTE WETENSCHAPPEN
ANALYTISCHE MECHANICA I
Tentamen 1ste Kandidatuur Burgerlijk Ingenieur
Academiejaar 2003-2004
20 januari 2004
Reeks 1

Vraag 1:



Bovenstaand stelsel bestaat uit drie **massaloze** staven **AD, BD** en **CD** met respectievelijke lengte $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ en $\mathbf{L_3}$. Deze drie staven zijn onderling verbonden door middel van twee scharnieren in het punt **D**.

Staaf **BD** is in het punt **B** verbonden met een vertikale geleider door middel van een **gladde** roloplegging en staaf **AD** is in het punt **A** op dezelfde wijze verbonden met een horizontale geleider. Staaf **CD** is in het punt **C** verbonden met het plafond door middel van een scharnier.

De punten **B** en **C** liggen op een horizontale afstand **d** van elkaar, terwijl de punten **A** en **C** op een vertikale afstand **h** van elkaar verwijderd liggen.

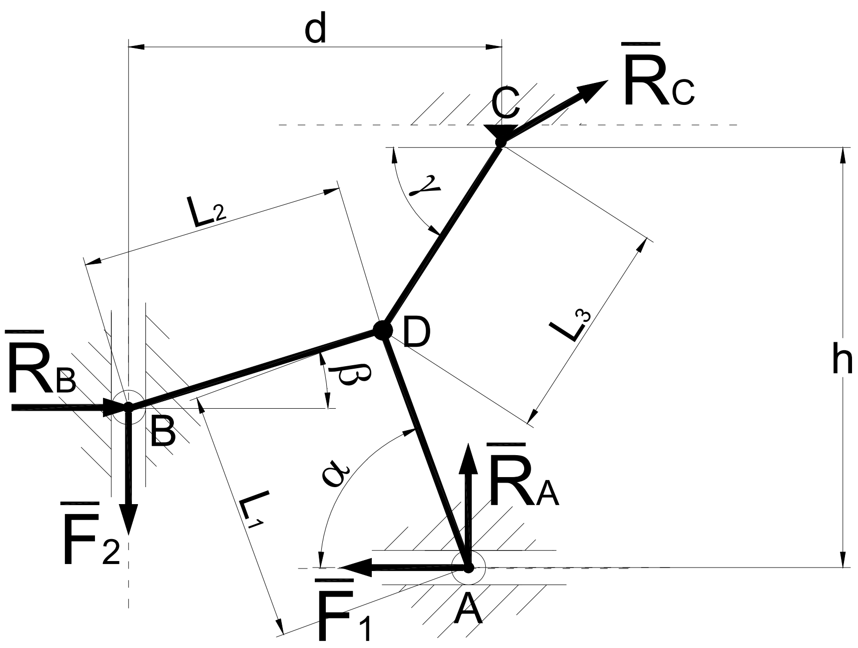
Op staaf **AD** grijpt in het punt **A** een horizontale kracht $\overline{\mathbf{F}}_1$ aan en op staaf **BD** grijpt een vertikale kracht $\overline{\mathbf{F}}_2$ aan in het punt **B**.

De hoek γ beschrijft de hoek tussen de staaf **CD** en de horizontale.

Gevraagd:

1. Bepaal het aantal vrijheidsgraden van dit systeem.
2. Duidt de uitwendige reaktiekrachten aan op de tekening.
3. Bepaal de evenwichtsbetrekking tussen de hoek γ en de overige parameters $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_3}$, **d** en **h** en bepaal de grootte van de uitwendige reaktiekrachten in de punten **A**, **B**, en **C** in functie van $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_3}$, **d**, **h** en γ. **Gebruik hiervoor de methode van het uitdrukken van de evenwichtsvoorwaarden** ($\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}\,;\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$).

Vraag 1 oplossing:



1. 3+3+3-2-2-2-1-1=1 vrijheidsgraad
2. zie tekening
3. We voeren extra in : α en β

- $$\overline{R} = 0 : \begin{cases} R_C^x - F_1 + R_B = 0 \\ R_C^y - F_2 + R_A = 0 \end{cases}$$
- Totaal moment t.o.v.D
$$R_C^y L_3 \cos\gamma - R_C^x L_3 \sin\gamma + F_2 L_2 \cos\beta$$
$$+ R_B L_2 \sin\beta + R_A L_1 \cos\alpha - F_1 L_1 \sin\alpha = 0$$
- Moment staaf AD t.o.v. D
$$R_A L_1 \cos\alpha - F_1 L_1 \sin\alpha = 0$$
- Moment staaf BD t.o.v. D
$$R_B L_2 \sin\beta + F_2 L_2 \cos\beta = 0$$

Dus :

$$\begin{cases} R_C^x = F_1 - R_B \\ R_C^y = F_2 - R_A \\ (F_2 - R_A)\cos\gamma + (R_B - F_1)\sin\gamma = 0 \\ R_A L_1 \cos\alpha - F_1 L_1 \sin\alpha = 0 \\ R_B L_2 \sin\beta + F_2 L_2 \cos\beta = 0 \end{cases}$$

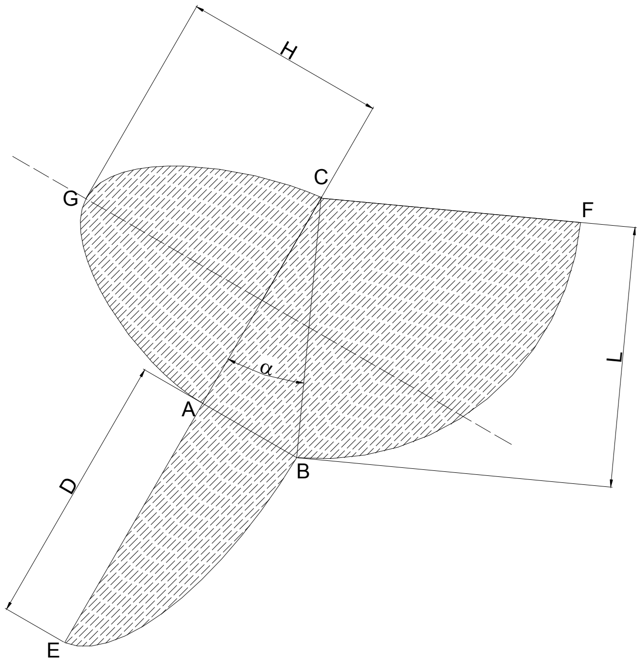
En de bindingen tussen de variabelen :

$$\begin{cases} L_2 \cos\beta + L_3 \cos\gamma = d & \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{d - L_3 \cos\gamma}{L_2} \\ \sin\beta = \dfrac{1}{L_2}\sqrt{L_2^2 - (d - L_3 \cos\gamma)^2} \end{cases} \\ L_1 \sin\alpha + L_3 \sin\gamma = h & \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{h - L_3 \sin\gamma}{L_1} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{L_1}\sqrt{L_1^2 - (h - L_3 \sin\gamma)^2} \end{cases} \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} R_A = F_1 \dfrac{H - L_3 \sin\gamma}{\sqrt{L_1^2 - (H - L_3 \sin\gamma)^2}} \\ R_B = -F_2 \dfrac{-L_3 \cos\gamma}{\sqrt{L_2^2 - (D - L_3 \cos\gamma)^2}} \\ R_C = \sqrt{{R_C^x}^2 + {R_C^y}^2} = \sqrt{(F_1 - R_B)^2 - (F_2 - R_A)^2} \\ (F_2 - R_A)\cos\gamma + (R_B - F_1)\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

Vraag 2:



In bovenstaande tekening is een **homogeen** voorwerp (te beschouwen als oppervlak) weergegeven met massadichtheid ρ.

Het voorwerp is samengesteld uit **4** stukken:

- **ABC** : een **rechthoekige driehoek** met rechte hoek in **A**.
- **ABE** : een kwart **ellips**.
- **BCF** : een kwart **cirkel**.
- **ACG** : het oppervlak begrepen tussen de **parabool ACG** en het lijnstuk **AC**.

Volgende dimensies zijn gedefinieerd:

- **L** : lengte van het lijnstuk **BC** en dus de straal van de kwart cirkel.
- **H** : de afstand tussen de top van de parabool en het lijnstuk **AC**.
- **D** : de lengte van **AE**, één van de halve assen van de kwart ellips.

De hoek α beschrijft de hoek tussen **CA** en **CB**.

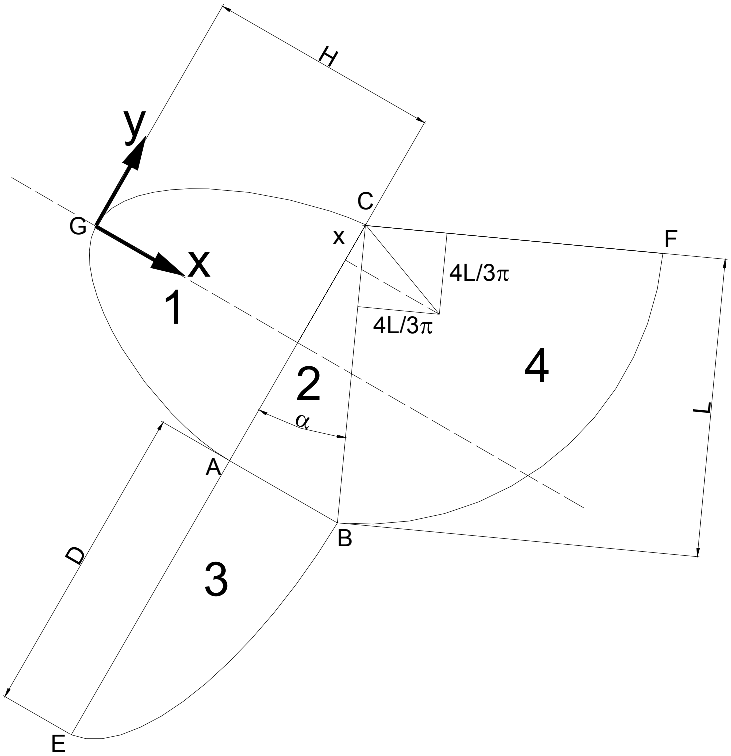
Gevraagd:

1. Bepaal a.d.h.v. symmetrie elementen en/of de stelling van Guldin en/of rechtstreekse integratie de betrekking tussen α, **L**, **D** en **H** zodanig dat het massamiddelpunt ligt op de loodlijn op **AC** gaande door het toppunt **G** van de parabool (gestreepte rechte).
2. Wat wordt de waarde van **D** indien : $\alpha=\pi/4$; **L=1** ; **H=1.**

Volgende gegevens mogen gebruikt worden, al de rest (dat niet evident is) moet gestaafd worden door berekening en/of redenering:

- Oppervlakte van een ellips met halve grote assen a en b: $\mathbf{S = \pi ab}$
- Oppervlakte van een bol met straal r : $\mathbf{S = 4\pi r^2}$
- Volume van een bol met straal r : $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$
- Volume van een kegel met hoogte h en straal van het grondvlak r : $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$
- Volume van een ellipsoïde met drie halve assen a, b en c : $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi abc}$

Vraag 2 oplossing:



Neem assenstelsel met X-as volgens de gestreepte loodlijn op AC en Y-as er loodrecht op. We moeten enkel in de Y-richting evalueren omdat het massamiddelpunt op X-as moet liggen.

We splitsen het probleem op in vier stukken en brengen ze dan terug samen.

1. Parabool : in dit assenstelsel moeten we de parabool niet beschouwen want zijn massamiddelpunt valt op de X-as dus $Y_1=0$ en de massa in de noemer (totale massa bij hersamenstelling) moet niet beschouwd worden daar de Y coordinaat van het globale massamiddelpunt ook nul moet zijn.
2. Driehoek : we passen de stelling van Guldin toe bij rotatie rond AB:

$$V = S2\pi y_g'$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{3}\pi|AC|^2|AB| = \frac{|AC||AB|}{2}2\pi y_g'$$

$$\Rightarrow \quad y_g' = \frac{|AC|}{3} = \frac{L\cos\alpha}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y_{g_2} = -\frac{L\cos\alpha}{2} + \frac{L\cos\alpha}{3} = -\frac{L\cos\alpha}{6}$$

3. Kwart ellips : we passen de stelling van Guldin toe bij rotatie rond AB:

$$V = S2\pi y_g'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi|AB||AE||AE| = \frac{\pi|AE||AB|}{4}2\pi y_g'$$

$$\Rightarrow \quad y_g' = \frac{4|AE|}{3\pi} = \frac{4D}{3\pi}$$

$$\Rightarrow \quad y_{g_3} = -\frac{L\cos\alpha}{2} - \frac{4D}{3\pi}$$

4. Kwart cirkel : is hetzelfde als een ellips

$$y_g' = \frac{4L}{3\pi}$$

$$\Rightarrow \quad y_{g4} = \frac{L\cos\alpha}{2} - \sqrt{2}\frac{4L}{3\pi}\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

$$= \frac{L\cos\alpha}{2} - \frac{4L}{3\pi}\cos\alpha + \frac{4L}{3\pi}\sin\alpha$$

We stellen de verschillende delen terug samen:

$$My_{g_{tot}} = M_1 y_{g_1} + M_2 y_{g_2} + M_3 y_{g_3} + M_4 y_{g_4}$$

$$(y_{g_{tot}} = 0 \quad \text{en} \quad y_{g_1} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad M_2 y_{g_2} + M_3 y_{g_3} + M_4 y_{g_4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L\cos\alpha \; L\sin\alpha}{2}\left(-\frac{L\cos\alpha}{6}\right) + \frac{\pi D L\sin\alpha}{4}\left(-\frac{L\cos\alpha}{2} - \frac{4D}{3\pi}\right)$$

$$+\frac{\pi L^2}{4}\left(\frac{L\cos\alpha}{2} - \frac{4L}{3\pi}\cos\alpha + \frac{4L}{3\pi}\sin\alpha\right) = 0$$

Oplossen naar D met cijfer voorbeeld:

VKV :

$$A.D^2 + B.D + C = 0$$

$$\text{met} \quad A = -\frac{L\sin\alpha}{3}$$

$$B = -\frac{\pi L^2 \sin 2\alpha}{16}$$

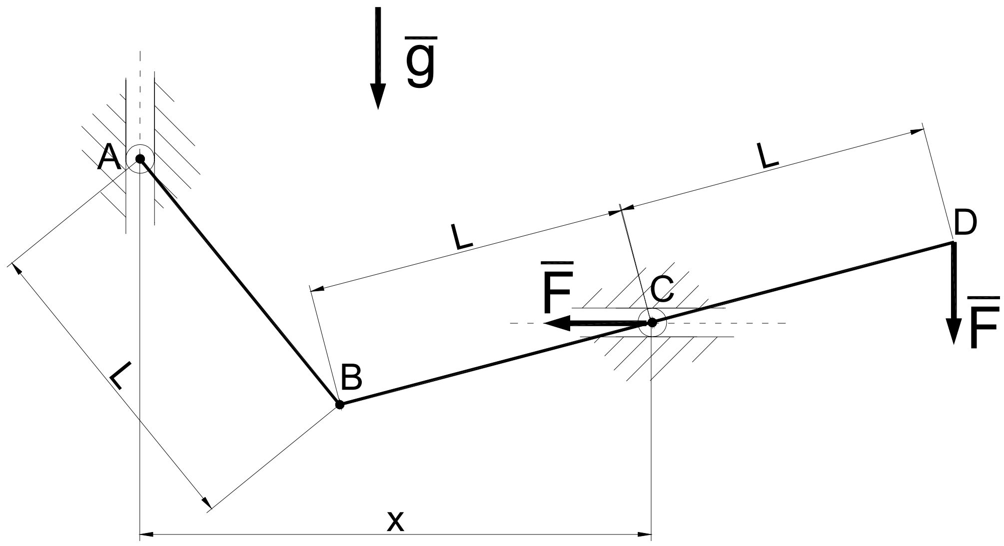
$$C = L^3\left(\frac{\pi\cos\alpha}{8} - \frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{24}\right)$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

$$B < 0 \text{ en } C < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{neem oplossing met minteken}$$

Cijfervoorbeeld : L=1 ; $\alpha=\pi/4$ D=0.69

Vraag 3:



Bovenstaand stelsel bestaat uit twee **homogene** staven **AB** en **BD** met respectievelijke lengte **L** en **2L** en respectievelijke massa **M** en **2M**. De twee staven zijn onderling verbonden door een scharnier in het punt **B**.

In het punt **A** is de staaf **AB** verbonden met een vertikale geleider door middel van een **gladde** roloplegging en het midden van staaf **BD** is op dezelfde manier verbonden in het punt **C** met een horizontale geleider.

Op de staaf **BD** grijpen twee extra krachten aan met dezelfde grootte **F**. In punt **C** is dit een horizontale kracht naar links gericht terwijl in punt **D** het gaat om een vertikale kracht naar beneden gericht.

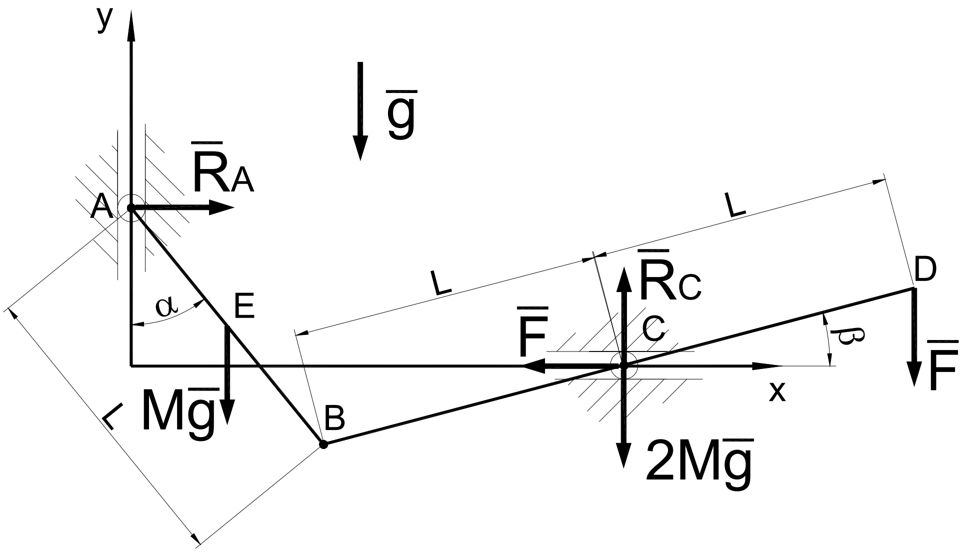
Het geheel bevindt zich in het zwaarteveld $\bar{\mathbf{g}}$.

X beschrijft de horizontale afstand tussen de vertikale geleider en het punt **C**.

Gevraagd:

1. Bepaal het aantal vrijheidsgraden van dit systeem.
2. Duidt de uitwendige reaktiekrachten aan op de tekening.
3. Bepaal met de **methode van de virtuele arbeid** de waarde van de afstand **X** bij evenwicht in functie van de gegeven parameters.

Vraag 3 oplossing:



1. 3+3-1-2-1=2 vrijheidsgraden
2. zie tekening
3. we voeren de twee lagrange coordinaten α en β in en kiezen een (veilig!!) assenstelsel zoals weergegeven op de tekening

$$\overline{OE} = \left(\ldots \ , \ -L\sin\beta + \frac{L}{2}\cos\alpha \right)$$

$$\Rightarrow \overline{EE'} = \left(\ldots \ , -L\cos\beta.\delta\beta - \frac{L}{2}\sin\alpha.\delta\alpha \right)$$

$$\overline{OC} = \left(L\sin\alpha + L\cos\beta, \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \overline{CC'} = \left(L\cos\alpha.\delta\alpha - L\sin\beta.\delta\beta, \ \ldots\right)$$

$$\overline{OD} = \left(\ldots , \ \ L\sin\beta\right)$$

$$\Rightarrow \overline{DD'} = \left(\ldots , \ \ L\cos\beta.\delta\beta\right)$$

De arbeidsvergelijking bij evenwicht wordt:

$$M\overline{g}.\overline{EE'} + \overline{F}.\overline{CC'} + \overline{F}.\overline{DD'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -Mg(-L\cos\beta.\delta\beta - \frac{L}{2}\sin\alpha.\delta\alpha)$$

$$-F(L\cos\alpha.\delta\alpha - L\sin\beta.\delta\beta) - F(L\cos\beta.\delta\beta) = 0$$

$\delta\alpha$ en $\delta\beta$ zijn onafhankelijk (twee vrijheidsgraden) en willekeurig klein dus:

$$\begin{cases} \dfrac{Mg}{2}\sin\alpha - F\cos\alpha = 0 & \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{Bgtg}\,\dfrac{2F}{Mg} \\ Mg\cos\beta + F\sin\beta - F\cos\beta = 0 & \Rightarrow \quad \beta = \mathrm{Bgtg}\left(1 - \dfrac{Mg}{F}\right) \end{cases}$$

De waarde van X bij evenwicht vinden we met:

$$x = L\sin\alpha + L\cos\beta = L\left[\sin\left(\mathrm{Bgtg}\,\frac{2F}{Mg}\right) + \cos\left(\mathrm{Bgtg}\left(1 - \frac{Mg}{F}\right)\right)\right]$$